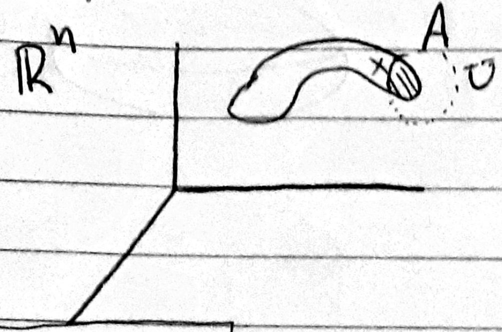
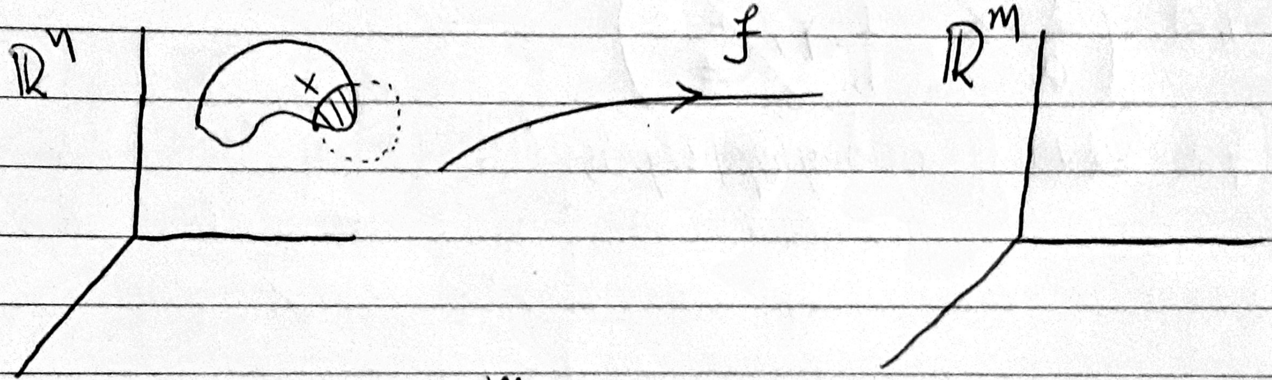
Μάθημα 9

07/11/2017



Επαγόμενη τοπολογία του A

Ορισμός Το υποσύνολο $X \subseteq A$ καλείται ανοικτό στο A αν-ν $\exists$ ανοικτό U του $\mathbb{R}^n$ ώστε $X = A \cap U$



$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

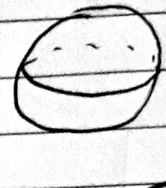
Η f καλείται <u>συνεχής</u> $\Leftrightarrow$ κάθε ανοικτό του $\mathbb{R}^m$ αντιστρέφεται σε ανοικτό του A

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ

Ορισμός Μια απεικόνιση $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$ καλείται ομοιομορφισμός $\Leftrightarrow$

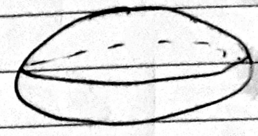
(i) Είναι συνεχής
(ii) αντιστρέφεται
(iii) η $f^{-1} : B \to A$ είναι συνεχής. Τα A, B καλούνται <u>ομοιόμορφα</u>

$$S^2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$



S^2

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$



$\mathcal{E}$

$f : S^2 \longrightarrow \mathcal{E}$

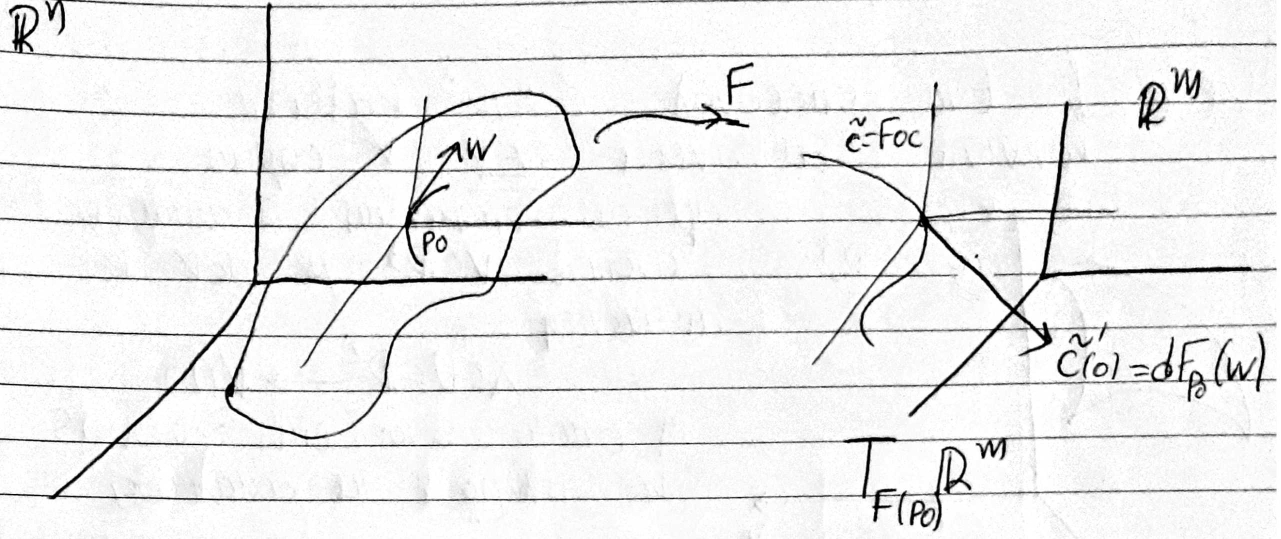
$f(x,y,z) = (ax, by, cz)$

Η f είναι 1-1 και επί με: $f^{-1} : \mathcal{E} \to S^2$

$$f^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{1}{a} x , \frac{1}{b} y , \frac{1}{z} c \right)$$

Η f είναι ομοιομορφισμός

$F: U\subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο p_0



$dF_{p_0}: T_{p_0}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(p_0)}\mathbb{R}^m$

$w\in T_{p_0}\mathbb{R}^n$, $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$, $c(0)=p$, $c'(0)=-w$

"ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ"

Έστω $F: U\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, C^1

Έστω $p_0\in U$ τέτοιο ώστε dF_{p_0} είναι 1-1 ($\Leftrightarrow$ ισομορφισμός $\Leftrightarrow$ επί $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} dF_{p_0}=n \Leftrightarrow \det dF_{p_0}\neq 0$)

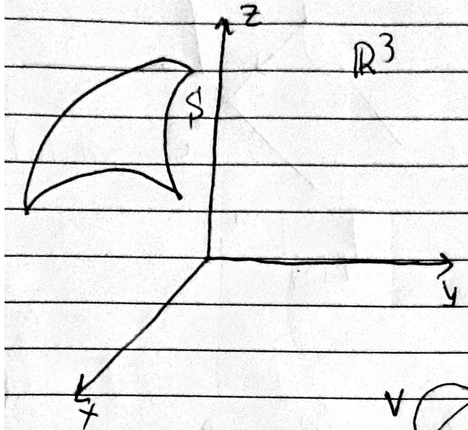
Τότε $\exists$ ανοιχτό $U_0\subseteq U$ με $p_0\in U_0$ και ανοιχτό $W\subset F(U)$ με $F(p_0)\in W$ ώστε η $F|_{U_0}: U_0\to W$ 1-1, επί και $F^{-1}: W\to U_0$ C^1.

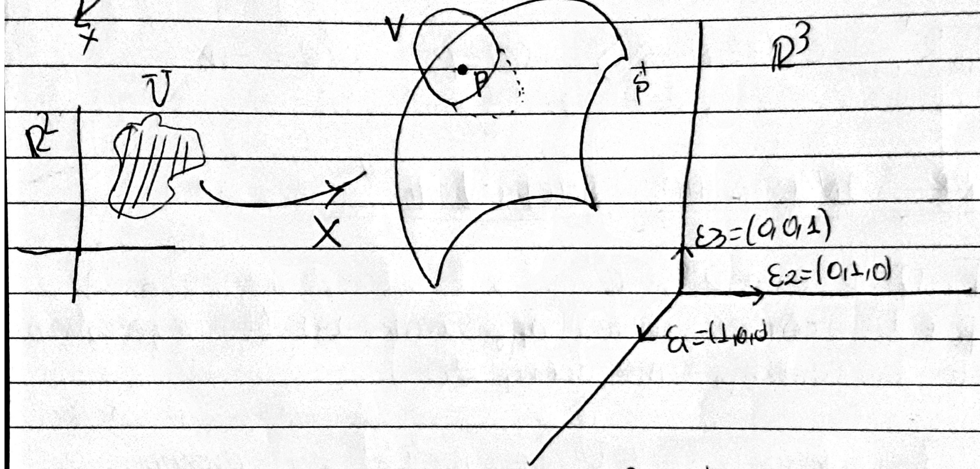
Κανονικές Επιφάνειες

Ορισμός Ένα υποσύνολ $S \subseteq \mathbb{R}^3$ καλείται κανονική επιφάνεια ανν $\forall$ σημείο p της επιφάνειας S υπάρχει ανοιχτό $V \subset \mathbb{R}^3$ με $p \in V$ και απεικόνιση

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \cap S$$

η οποία είναι επί του $V \cap S$ και πληρεί τα ακόλουθα





(i) Η X να είναι λεία (C^3)

(ii) Η $X: U \longrightarrow V \cap S$ είναι ομοιομορφισμός

(iii) $\forall\, q \in U$ το διαφορικό $dX_q : T_q\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{X(q)}\mathbb{R}^3$ είναι 1-1.

ΟΡΟΛΟΓΙΑ

1) Κάθε τέτοια απεικόνιση καλείται σύστημα συντεταγμένων του S

2) Το $V \cap S$ (ανοικτό στην S) καλείται περιοχή συντεταγμένων

3) $p \in X(U) = V \cap S$, $\exists (u,v) \in U$ $p = X(u,v)$

Το ζεύγος (u,v) καλείται συντεταγμένες του p ως προς το σύστημα συντεταγμένων X

$\{e_1, e_2\}$ βάση του $T_q\mathbb{R}^2 \xrightarrow{dX_q\ 1-1}$

$dX_q(e_1)$, $dX_q(e_2)$ γραμ. ανεξ. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{dX_q(e_1) \times dX_q(e_2) \neq 0}$

$dX_q(e_1) = ?$ $\quad q = (u_0, v_0)$, $c(t) = (u_0, v_0) + te_1$

$c(t) = (u_0 + t, u_0)$ $\quad dX_q = (X \circ c)'(0) = \dfrac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) = X_u(u_0, v_0)$

$c(0) = (u_0, v_0)$

$c'(0) = e_1$ $\quad dX_q(e_2) = \dfrac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) = X_v(u_0, v_0)$

dX_q είναι 1-1 $\Leftrightarrow X_u \times X_v(q) \neq 0 \Leftrightarrow X_u(q), X_v(q)$ είναι γρ. ανεξ.

Οι καμπύλες $X(u, v = u_1)$ εφάπτονται στο X_u

$X(u = u_0, v)$ εφάπτονται στο X_v

$\Big\}$ καλούνται

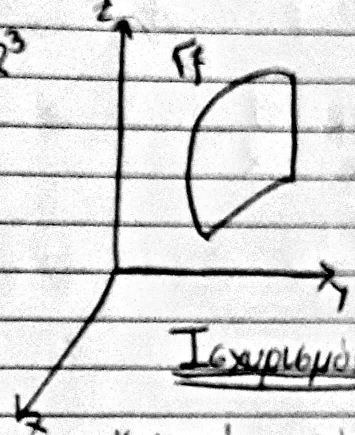
παραμετρικές καμπύλες του X.

(u,v) Παράμετροι του συστήματος συντεταγμένων του X

Παράδειγμα

1) Επιφάνειες γραφήματα

Έστω $h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση



Το γράφημα της h είναι το σύνολο

$$\Gamma h = \{(x,y,h(x,y)) / (x,y) \in U\}$$

Ισχυρισμός: Θα Δ.Ο. Γf είναι κανονική επιφάνεια. Ορίζω την $X: U \to V \cap \Gamma f$

$X(u,v) = (u,v,h(u,v))$, $V = \mathbb{R}^3$ X επί, λεία

$X(u_1,v_1) = X(u_2,v_2) \Rightarrow (u_1,v_1,h(\cdot,\cdot)) = (u_2,v_2,h(\cdot,\cdot)) \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1 = u_2,\ v_1 = v_2 \Rightarrow X$ είναι 1-1

$X^{-1}: \Gamma f \to U$, $X^{-1}(x,y,z) = (u,v) \Leftrightarrow X(u,v) = (x,y,z) \Rightarrow$

είναι η προβολή

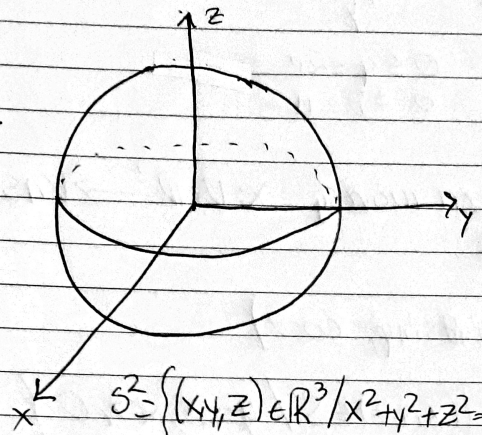
$\Rightarrow (u,v,h(u,v)) = (x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = y \\ z = h(x,y) \end{cases}$ | $X^{-1}(x,y,z) = (x,y)$

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y,0) / x,y \in \mathbb{R}\}$

$X_u(u,v) = (1,0,h_u(u,v))$
$X_v(u,v) = (0,1,h_v(u,v))$

$$X_u \times X_v(u,v) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & h_u(u,v) \\ 0 & 1 & h_v(u,v) \end{vmatrix} = (-h_u(u,v), -h_v(u,v), 1) \neq (0,0,0)$$

(2) S^2



$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=1\}$

Ορίζω $X_1 : U \to V_1 \cap S^2$

$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \geq 0\}$, $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u^2+v^2<1\}$

$X_1(u,v) = (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$

$X_2 : U \longrightarrow V_2 \cap S^2$, $X_2(u,v) = (u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2})$, $V_2 = \{(x,y,z) / z<0\}$

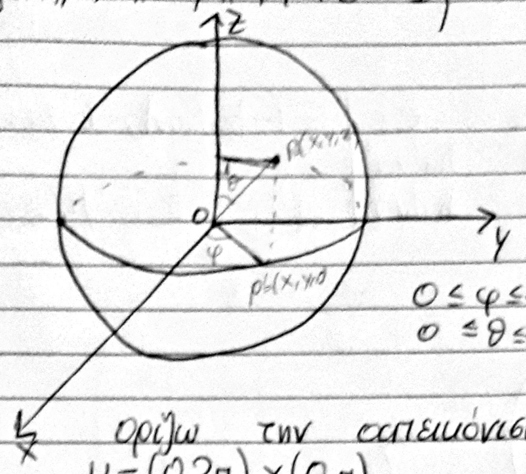
$X_3 : U \longrightarrow V_3 \cap S^2$, $X_3(u,v) = (u,\sqrt{1-u^2-v^2},v)$, $V_3 = \{(x,y,z), y>0\}$

$X_4 : U \to V_4 \cap S^2$, $X_4(u,v) = (u,-\sqrt{1-u^2-v^2},v)$
$V_4 = \{(x,y,z), y<0\}$

$X_5 : U \longrightarrow V_5 \cap S^2$, $X_5(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2},u,v)$, $V_5 = \{(x,y,z), x>0\}$

$X_6 : U \to V_6 \cap S^2$, $X_6(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2},u,v)$, $V_6 = \{(x,y,z), x<0$

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$



$z = \cos\theta$
$y = \sin\theta \sin\varphi$
$x = \sin\theta \cos\varphi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq \theta \leq \pi$

Ορίζω την απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S^2$
$U = (0,2\pi) \times (0,\pi)$

$X(\varphi,\theta) = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$

$X(U) = S^2 \setminus C,\quad C = \{(x,y,z) \in S^2 \,/\, y=0,\ x \geq 0\}$

$= V \cap S^2$

$V = \{(x,y,z) \,/\, x \geq 0\}^c$

$X(\varphi_1,\theta_1) = X(\varphi_2,\theta_2) \Rightarrow (\sin\theta_1\cos\varphi_1,\ \sin\theta_1\sin\varphi_1,\ \cos\theta_1) =$

$= (\sin\theta_2\cos\varphi_2,\ \sin\theta_2\sin\varphi_2,\ \cos\theta_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \xRightarrow{\theta_1,\theta_2 \in (0,\pi)} \boxed{\theta_1 = \theta_2} \\ \sin\theta_1\cos\varphi_1 = \sin\theta_2\cos\varphi_2 \\ \sin\theta_1\sin\varphi_1 = \sin\theta_2\sin\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 \end{matrix} \ \xrightarrow[0<\varphi_2<2\pi]{0<\varphi_1<2\pi}\ \begin{matrix} \theta_1 = \theta_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{matrix}$$